IV. Integrálszámítás

Ha ismert az egyváltozós $f(x)$ függvény, differenciálhatjuk, hogy megkapjuk pontonkénti változásának sebességét, a df/dx mennyiséget. Ennek a folyamatnak a fordítottja (inverze) az integrálás, amikor a derivált ismeretéből kívánunk a függvényre következtetni. Az integrálokat átlagoláshoz, átlagértékek és középértékek számításához használjuk leggyakrabban a fizikai kémiában.

Fogalmak, definíciók

(a) valamely $f(x)$ függvény **határozatlan integrálja** minden olyan $F(x)$ függvény, melynek deriváltja az adott $f(x)$ függvény; jelölés: $\int f(x)dx = F(x) + c$

(b) az $F(x)$ függvényt az $f(x)$ függvény **primitív függvényének** (határozatlan integráljának) nevezzük az (a,b) véges vagy végtelen intervallumon, amennyiben differenciálhányadosa (deriváltja) ezen intervallum minden pontjában $f(x)$

(c) az integrálandó függvény neve **integrandus**

(d) a **Newton–Leibniz formula** értelmében a **határozott integrálok** számítása a következőképpen történhet: $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

(e) az integrálás mint lineáris operátor: $\int (f+g)\mathrm{d}x = \int f\mathrm{d}x + \int g\mathrm{d}x$, $\int Af\mathrm{d}x = A\int f\mathrm{d}x$ és $\int (Af+Bg)\mathrm{d}x = A\int f\mathrm{d}x + B\int g\mathrm{d}x$

(f) az integrálszámítást felhasználhatjuk területszámításhoz, átlagérték számoláshoz ($\bar{t} = \left(\int_a^b f dt\right)/(b-a)$), négyzetes középérték számoláshoz, ívhossz számoláshoz, térfogat és felszín számításához, súlypontszámításhoz

(g) alapvető függvények integrálfüggvényei

függvény, $y(x)$	$\int f(x)\mathrm{d}x$	függvény, $y(x)$	$\int f(x)\mathrm{d}x$
A, konstans	$Ax + c$	$\sin(ax+b)$	$\frac{-\cos(ax+b)}{a} + c$
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + c,\ n \neq -1$	$\cos(ax+b)$	$\frac{\sin(ax+b)}{a} + c$
$x^{-1} \equiv 1/x$	$\ln\lvert x\rvert + c$	$\mathrm{tg}(ax+b)$	$\frac{\ln\lvert\cos(ax+b)\rvert}{a} + c$
e^x	$e^x + c$	$\frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$	$\sin^{-1}\frac{x}{a} + c$
e^{ax}	$a^{-1}e^{ax} + c$	$\frac{1}{a^2 + x^2}$	$\frac{1}{a}\mathrm{tg}^{-1}\frac{x}{a} + c$
$\sin x$	$-\cos x + c$	$\mathrm{sh}\, x$	$\mathrm{ch}\, x + c$
$\cos x$	$\sin x + c$		

Mintafeladatok

- A fenti táblázat segítségével határozzuk meg a következő kifejezés határozatlan integrálját: cos(*kx*).

  Megoldás: A táblázatban $\int \cos(ax)\,\mathrm{d}x = \frac{\sin(ax)}{a} + c$ szerepel. Jelen esetben $a = k$, így $\int \cos kx\,\mathrm{d}x = \frac{\sin kx}{k} + c$.

- A fenti táblázat segítségével határozzuk meg a következő kifejezés határozatlan integrálját: sin(3x + 2).

  Megoldás: A táblázatban azt találjuk, hogy $\int \sin(ax+b)\,\mathrm{d}x = \frac{-\cos(ax+b)}{a} + c$. Jelen esetben $a = 3$ és $b = 2$, így $\int \sin(3x+2)\,dx = \frac{-\cos(3x+2)}{3} + c$.

- Számítsuk ki a következő határozott integrált: $\int_2^4 \frac{3t^2+2t}{t^3+t^2+1}\,\mathrm{d}t$.

  Megoldás: Tudjuk, hogy $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln|f| + c$. Ennek segítségével már könnyen megoldható a feladat: $\int_2^4 \frac{3t^2+2t}{t^3+t^2+1}\,\mathrm{d}t = \left[\ln\left|t^3+t^2+1\right|\right]_2^4 = \ln 81 - \ln 13 \cong 1{,}83$.

Gyakorló feladatok

- Számítsa ki a következő határozatlan integrálokat: (a) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$; (b) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$; (c) $\int \mathrm{d}x$; (d) $\int \cos 2x \,\mathrm{d}x$; (e) $\int e^{2x}\mathrm{d}x$; (f) $\int \frac{1}{x+3}\mathrm{d}x$; (g) $\int \frac{1}{3-x}\mathrm{d}x$; (h) $\int \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}\,\mathrm{d}x$; (i) $\int \frac{e^x}{3-e^x}\mathrm{d}x$.
- Számítsa ki a következő határozatlan integrálokat:
  - $(a) \int \mathrm{tg}x\, dx$ (megoldás: $-\ln|\cos x| + C$)
  - $(b) \int \frac{1}{\sin^2 2x}\, dx$ (megoldás: $-\frac{1}{2}\mathrm{ctg}2x + C$)
  - $(c) \int \frac{(x^2+3)(x^3-2)}{2\sqrt[3]{x^2}}\, dx$ (megoldás: $\frac{3}{32}x^{16/3} + \frac{9}{20}x^{10/3} - \frac{3}{7}x^{7/3} - 9x^{1/3} + C$)
  - $(d) \int \mathrm{tg}^2 x\, dx$ (megoldás: $\mathrm{tg}x - x + C$)
  - $(e) \int x(3x^2+5)^8\, dx$ (megoldás: $\frac{1}{54}(3x^2+5)^9 + C$)
  - $(f) \int \frac{1}{x^2}\cos\frac{2\pi}{x} dx$ (megoldás: $-\frac{1}{2\pi}\sin\frac{2\pi}{x} + C$)
  - $(g) \int \frac{5^x}{1+25^x}\, dx$ (megoldás: $\frac{1}{ln5}arctg5^x + C$)
  - $(h) \int e^{\sqrt{x}}\, dx$ (megoldás:$2\sqrt{x}e^{\sqrt{x}} - 2e^{\sqrt{x}} + C$)
- Számítsa ki a következő határozott integrálokat:
  - $(a) \int_{-4}^{-2} \frac{1}{x^2}\, dx$ (megoldás: $1/4$)
  - $(b) \int_2^6 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\, dx$ (megoldás: 2,56)
  - $(c) \int_6^{10} \frac{2}{x-3}\, dx$ (megoldás: 1,68)
  - $(d) \int_0^{\pi/4} cos3x\, dx$ (megoldás: 0,236)
  - $(e) \int_0^2 x\, e^x dx$ (megoldás: 8,4)
  - $(f) \int_2^3 x^2\, e^{2x} dx$ (megoldás: $\frac{13}{4}e^6 - \frac{5}{4}e^4$)
  - $(g) \int_{-\pi/4}^{\pi/4} x\, sinx\, dx$ (megoldás: 0,304)
  - $(h) \int_{-1}^{0} \frac{3}{e^3+1} dx$ (megoldás: 1,86)
  - $(i) \int_1^4 \frac{x}{\sqrt{5x-4}} dx$ (megoldás: $66/25$)
  - $(j) \int_e^{e^2} x^2 \ln x\, dx$ (megoldás: $1960/9$)

$(k)\ \iint \frac{1}{(x+y)^2} dxdy$, ha $3 \le x \le 4$ és $1 \le y \le 2$ (megoldás: 2 ln5 - ln6 - ln4)

$(l)\ \iint 5x^2y - 2y^3 dxdy$, ha$1 \le x \le 3$ és $2 \le y \le 5$ (megoldás: 660)

- Számítsa ki a következő határozott integrálok értékét: $(a)\ \int_2^3 x^2 \mathrm{d}x$; $(b)\ \int_2^4 \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$; $(c)\ \int_a^b \mathrm{d}x$; $(d)\ \int_0^\pi \sin\theta\, \mathrm{d}\theta$; $(e)\ \int_{-1}^1 e^{-2x} \mathrm{d}x$; $(f)\ \int_2^3 \frac{\mathrm{d}x}{x}$.
- Adja meg a következő határozott integrál értékét: $I_1 = \int_0^\infty e^{-x} \mathrm{d}x$.
- Határozza meg, mivel egyenlő $\int \mathrm{tg}\, x\, \mathrm{d}x$.
- Adja meg az $y = x^2$ függvény átlagos értékét a $0 \le x \le 2$ intervallumon.
- Határozza meg az $y = x^2$ és az $y = 1 - x^2$ görbék által határolt síkidom területét!
- Egy x folytonos, véletlen változóra vonatkozó $f(x)$ **valószínűségi sűrűségfüggvénytől** (PDF, *probability density function*) megköveteljük, hogy a teljes értelmezési tartományon vett integrál értéke 1 legyen. Legyen x egy folytonos véletlen változó, mely bármely értéket felvehet az [1,4] intervallumon. (a) Bizonyítsa be, hogy $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ megfelelő PDF. (b) Mi annak a valószínűsége, hogy $x \in [2;3,5]$, azaz mekkora $P(2 \le x \le 3,5)$? (c) Mi annak a valószínűsége, hogy $x \ge 2$, azaz $P(x \ge 2)$? (d) Mi annak a valószínűsége, hogy $x < 3$, azaz $P(x < 3)$?
- Egy m tömegű rugó esetében legyen a kitérítéssel (x) arányos visszahúzó erő, f, a kitérítéssel lineárisan arányos (**Hooke-törvény**), azaz $f = -kx$, ahol k az ún. rugóállandó. Adja meg a rugóra vonatkozó $V(x)$ potenciálfüggvény alakját, amennyiben tudjuk, hogy a potenciál első deriváltjának –1-szerese a (visszahúzó) erő.
- A gravitáció hatása alatt szabadon hulló m tömegű testre $F = mg$, lefelé mutató irányú erő hat. Integrálszámítás segítségével határozza meg, mekkora munkát végez a gravitáció ezen a testen, amennyiben h magasságból hullik le a test és $\Delta W \approx f(x)\Delta x$. Különbözik-e ettől a munkától a test h magasságú, a gravitáció ellenében végzett megemeléséhez szükséges munka?
- Két, egymástól x távolságban lévő, q_1, illetve q_2 töltésű részecske között a **Coulomb-törvény** értelmében vákumban $F(x) = \frac{q_1 q_2}{(4\pi\varepsilon_0)x^2}$ erő hat, ahol ε_0 a vákum permittivitása. (a) Határozza meg azt a munkát, amely kezdetben egymástól végtelen távolságban lévő, azonos töltésű részecskék egymástól x távolságra történő összehozásához szükséges. (b) Milyen a kölcsönhatást jellemző elektrosztatikus potenciál alakja?
- Mennyi munka kell ahhoz, hogy ideális gázt izoterm módon V térfogatról $V/2$ térfogatra nyomjunk össze?

- A $pV_\mathrm{m} = RTZ$ állapotegyenlettel (V_m a moláris térfogat és Z egy kompressziós tényező) jellemezhető gáz fugacitási együtthatója megadható, mint $\ln\gamma = \int_0^p \left(\frac{Z-1}{p}\right)\mathrm{d}p$.
  A $p(V_\mathrm{m} - b) = RT$ állapotegyenlet esetére mutassa meg, hogy $Z = 1 + \frac{bp}{RT}$ és ezután adja meg $\gamma(p,T)$ függvényt.
- Egy egyenes vonalú mozgát végző részecske t időpillanatbeli sebessége $v = 3t^2$. Adja meg a $t = 1$ és $t = 2$ időpillanatok között a részecske által megtett utat.
- Egy enyhén nemideális gáz esetében a van der Waals állapotegyenlet alakja $\left(p + \frac{n^2a}{V^2}\right)(V - nb) = nRT$. Adja meg azokat a kifejezéseket, melyek leírják a gáz által végzett munkát, amennyiben az V_1-ről V_2 térfogatra tágul (a) állandó nyomás és (b) állandó hőmérséklet mellett.
- Mennyi munkát kell végeznünk, hogy a $V(x) = -xe^{-x}$ potenciál minimumhelyén lévő tömegpontot a végtelenbe elvigyük? (A biztonság kedvéért ellenőrizze az energia-megmaradás segítségével a számoltakat!)

IV.1 Parciális integrálás

Parciális integrálás alkalmazásával egy szorzat alakú függvény integrálását a következő módon végezzük el:

$$\int u\left(\frac{dv}{dx}\right)\mathrm{d}x = uv - \int v\left(\frac{du}{dx}\right)\mathrm{d}x \ .$$

A lényeg, hogy amennyiben a szorzatfüggvény egyik tagja deriváltfüggvény, úgy ezen derivált helyett áttérhetünk a másik függvény deriváltjára az integrálszámítás során, amennyiben azt a formulát hasznosabbnak ítéljük. A differenciálszámítás ismert szabályai segítségével a parciális integrálás szabálya könnyen levezethető, illetve megjegyezhető:

$$\frac{d}{dx}(uv) = \frac{du}{dx}v + u\frac{dv}{dx} \Rightarrow u\frac{dv}{dx} = \frac{d}{dx}(uv) - v\frac{du}{dx} \ .$$

Mintafeladatok

- Határozzuk meg a következő integrált: $I = \int e^{3x}\sin 2x\,dx$.

  Megoldás: Alkalmazzuk a parciális integrálást az $u = e^{3x}$ és $v' = \sin 2x$ választásokkal. Ekkor $u' = 3e^{3x}$ és $v = -\cos 2x/2$ alapján $\int e^{3x}\sin 2x\,dx = \frac{-e^{3x}\cos 2x}{2} + \int\frac{3e^{3x}\cos 2x}{2}dx = -\frac{1}{2}e^{3x}\cos 2x + \frac{3}{2}\int e^{3x}\cos 2x dx$. Ismét parciálisan integrálunk, most az $u = e^{3x}$ és $v' = \cos 2x$ választásokkal. Ekkor $u' = 3e^{3x}$ és $v = \sin 2x/2$ alapján $\int e^{3x}\sin 2x dx = \frac{1}{2}e^{3x}\sin 2x - \int\frac{3}{2}e^{3x}\sin 2x dx$, azaz $I = -\frac{1}{2}e^{3x}\cos 2x + \frac{3}{4}e^{3x}\sin 2x - \frac{9}{4}\int e^{3x}\sin 2x dx$. Az egyenlőséget rendezve (a keresett integrál mind a bal, mind a jobb oldalon előfordul) megkapjuk a keresett végeredményt:

  $$I = \frac{e^{3x}}{13}\left(3\sin 2x - 2\cos 2x\right) + C \ .$$

Gyakorló feladatok

- Határozza meg a következő integrál értékét: $I = \int_0^\infty xe^{-x}dx$.
- Határozza meg a következő integrál értékét: $I = \int_0^\infty x^2e^{-x}\mathrm{d}x$.
- Határozza meg a következő integrál értékét: $I = \int \ln(x)\,dx$.

IV.2 Helyettesítéses integrálás

A helyettesítéses integrálás a differenciálszámításnál megismert láncszabály integrálási megfelelője. Nagyon fontos megjegyezni, hogy határozott integrál esetén a helyettesítés következtében az integrálási határok vátozhatnak. A technika használatát legegyszerűbb példákon keresztül szemléltetni.

Mintafeladatok

- Adjuk meg a következő kifejezés határozatlan integrálját: $\int (3x+1)^{2,7}\,\mathrm{d}x$.

  Megoldás: Végezzük el a $z = 3x+1$ helyettesítést. Ekkor $\frac{dz}{dx} = 3$, azaz dx = dz / 3. Tehát,

  $$\int z^{2,7}\frac{1}{3}\,\mathrm{dz} = \frac{1}{3}\left(\frac{z^{3,7}}{3,7}\right) + c = \frac{1}{3}\frac{(3x+1)^{3,7}}{3,7} + c.$$

Gyakorló feladatok

- Számolja ki az R sugarú kör területét helyettesítéses integrálással. (Segítség: érdemes a kör negyedének a területét számolni, a kör egyenlete $R^2 = x^2 + y^2$, és az integrál kiszámolásához érdemes az $x = R\sin(u)$ képlettel definiált helyettesítést alkalmazni.

IV.3 Integrálás parciális törtekre bontással

Mintafeladatok

- Adjuk meg a következő kifejezés határozatlan integrálját: $\int \frac{1}{x^3+x}\,\mathrm{d}x$.

  Megoldás: Végezzük el a nevező felbontásával az integrálandó függvény két tagra bontását: $\frac{1}{x^3+x} = \frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} \Rightarrow 1 = A(x^2+1) + x(Bx+C)$, azaz $A = 1$, $B = -1$ és $C = 0$. Tehát, $\int \frac{1}{x^3+x}\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right| + c$.

Gyakorló feladatok

- Parciális törtekre bontással számolja ki a következő integrált: $I = \int_1^2 \frac{1}{x^2+3x+2}\,dx$.

IV.4 Integrálás sorfejtéssel

Fogalmak, defincíciók

Ha az integrálandó függvény $f(x) = \sum_k c_k x^k$ alakban írható fel (például közelítően), úgy $\int f(x)\mathrm{d}x = \sum_k c_k \int x^k \mathrm{d}x$, azaz $\int f(x)\mathrm{d}x = \sum_k c_k \frac{x^{k+1}}{k+1}$. Ez az integrálási technika akkor működik, ha a sor konvergens.

Gyakorló feladatok

- Tudjuk, hogy $\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$ és $\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$. Lássa be a hatványsorokra vonatkozó integrálási szabály segítségével, hogy $\int \cos(x)\,dx = \sin(x) + c$.

IV.5 Ívhossz és ívhosszintegrál

Fogalmak, defincíciók

Amennyiben az $y = f(x)$ függvény az $[a,b]$ intervallumon folytonos és differenciálható, továbbá a differenciálhányadosa korlátos, úgy az a és b abszcisszák által határolt vonaldarab **ívhosszát** az $s = \int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx$ határozott integrál adja. Ez tulajdonképpen megfelel egy skalárfüggvény integráljának egy megadott görbe mentén. A képlet helyessége könnyen belátható, amint felidézzük, hogy $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1+(y')^2}\,dx$.

(a) Amennyiben a görbe paraméteres egyenletrendszerrel ($x = x(t)$ és $y = y(t)$) adott, úgy $s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,\mathrm{d}t$.

(b) Ha a görbe **(síkbeli) polárkoordinátákkal** adott, úgy $s = \int_{\phi_1}^{\phi_2} \sqrt{r^2 + \dot{r}^2}\,\mathrm{d}\phi$.

A leírtaknak mindenben megfelelően lehet kiszámítani egy térgörbe **ívhosszintegrálját**, mely egy skalárfüggvény (pl. $\varphi(\mathbf{r}) = \varphi(x,y)$) integrálása egy C görbe mentén. Az ívhossz integrál: $I = \int_C \varphi(x,y)ds$. Sík görbére d$s$ ismerete alapján azt írhatjuk, hogy $I = \int_{x_A}^{x_B} \varphi(x, y(x))\sqrt{1+y'^2}\,dx$. Amennyiben $\mathbf{r}(t)$ adja a g görbe paraméteres egyenletét ($x = x(t)$ és $y = y(t)$), úgy $I = \int_{t_A}^{t_B} \varphi(x(t), y(t))\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$.

Mintafeladatok

- Határozzuk meg az $x^2 + y^2 = 25$ kör ívének hosszát az $x_1 = 0$ és $x_2 = 5$ abszcissza pontok által határolt szakasz felett.

  Megoldás: Az egyenlet alapján $y = \sqrt{25 - x^2}$ és $y' = \frac{1}{2}\left(25 - x^2\right)^{-1/2}(-2x) = -\frac{x}{\sqrt{25-x^2}}$, azaz $s = \int_0^5 \sqrt{1 + \frac{x^2}{25-x^2}}\,\mathrm{d}x = \int_0^5 \sqrt{\frac{25 - x^2 + x^2}{25-x^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{5}{5}\int_0^5 \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{x}{5})^2}}\,\mathrm{d}x$. Integráltáblázat segítségével $\underline{\underline{s}} = \left[5\arcsin\frac{x}{5}\right]_0^5 = 5\arcsin 1 = \underline{\underline{\frac{5\pi}{2}}}$. Ez valóban egy negyed körív hossza (hiszen az r sugarú kör kerülete $K = 2r\pi$), amennyiben a sugár 5.

- Egy repülő Dömsöd felett (ami 50 km-re van Ferihegytől) megkapja a leszállási pályát: $f(x) = 0.2x\sqrt{x} + 10$. Hány km-t tesz meg a gép?
  Megoldás:
$$f(x) = 0.2x\sqrt{x} + 10 = 0.2x^{3/2} + 10$$
$$f'(x) = \frac{2}{10}\frac{3}{2}x^{1/2} = \frac{3}{10}x^{1/2}$$
$$s = \int_0^{50}\sqrt{1+f'(x)^2}\text{dx}=\int_0^{50}\sqrt{1+\left(\frac{3}{10}x^{1/2}\right)^2}\,dx = \int_0^{50}\sqrt{1+\frac{3}{100}x}\,dx$$
$$s = \left[\frac{2}{3}\frac{100}{9}\left(1+\frac{9}{100}x\right)^{3/2}\right]_0^{50} = 88.1\text{ km}$$
- Számítsuk ki az $x_1 = 3$ és $x_2 = 24$ abszcissza pontok között az $\int y ds$ -t azon C görbe mentén, melynek egyenlete $y = 2\sqrt{x}$.
  Megoldás: Tudjuk, hogy $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1+(y')^2}\,dx$, azaz $\int_C y\,\text{ds} = \int_3^{24} 2\sqrt{x}\sqrt{1+\frac{1}{x}}\text{d}x = 2\int_3^{24}\sqrt{x+1}\;\text{d}x = 156$. Itt persze nem az ívhosszat kaptuk meg, hanem kiszámítottunk egy ívhosszintegrált.
- Egy mesterlövész az 1 km-re lévő céltáblára lő. A puskagolyó pályája $f(x) = 2\ln\left(\frac{4}{4-x^2}\right)$. Mekkora utat tesz meg a golyó a céltábláig?

  Megoldás: $f(x) = 2\ln\left(\frac{4}{4-x^2}\right)$
$$f'(x) = 2\cdot\frac{4-x^2}{4}\cdot 4\cdot(-1)\cdot\frac{4}{(4-x^2)^2}\cdot(-2x) = \frac{4x}{4-x^2}$$
$$s = \int\sqrt{1+f'(x)^2dx} = \int_0^1\sqrt{1+\left(\frac{4x}{4-x^2}\right)^2}\,dx = \int_0^1\sqrt{1+\frac{16x^2}{(4-x^2)^2}}\,dx$$
$$= \int_0^1\sqrt{\frac{(4-x^2)^2+16x^2}{(4-x^2)^2}}\,dx = \int_0^1\sqrt{\frac{16-8x^2+x^4+16x^2}{(4-x^2)^2}}\,dx =$$
$$= \int_0^1\sqrt{\frac{(4+x^2)^2}{(4-x^2)^2}}\,dx = \int_0^1\frac{4+x^2}{4-x^2}\,dx = -\int_0^1\frac{4+x^2}{x^2-4}\,dx = -\int_0^1\frac{x^2-4}{x^2-4}+\frac{8}{x^2-4}\,dx$$
$$= -\int_0^1 1+\frac{8}{(x-2)(x+2)}\,dx$$

A második tagot parciális törtekre kell bontani, mielőtt meg tudjuk oldani az integrált.

$$\frac{8}{x^2-4} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-2}$$
$$8 = Ax - 2A + Bx + 2B$$
$$A + B = 0$$
$$A = -B$$
$$2B - 2A = 8$$
$$4B = 8$$

Vagyis $B = 2$ és $A = –2$.

$$-\int_0^1 1 - \frac{2}{x+2} + \frac{2}{x-2}\,dx = -[x - 2\ln(x+2) + 2\ln(x-2)]_0^1$$
$$= \left[-x + ln\left(\frac{x+2}{x-2}\right)\right]_0^1 = -1 + \ln(9) - 0 - \ln(1) = 1.12 \text{ km}$$

Gyakorló feladatok

- Határozza meg az $y = \cosh x$ függvénygörbe $x_1 = 0$ és $x_2 = 3$ abszcisszájú pontok által határolt ívének hosszát.
- Határozza meg az $y = x^2$ függvény görbéjének az $x_1 = 1$ és $x_2 = 4$ abszcissza pontjai által határolt ívének hosszúságát (a megoldás kicsit nehézkes, ennek során használja fel az alábbi helyettesítést: $2x = \sinh u$).

IV.6 Vonalintegrál

A **vonalintegrál**, $\int\limits_{(a_1,b_1)}^{(a_2,b_2)} \left[P\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y\right]$ számítása egy vektorfüggvény integrálásának felel meg egy görbe mentén. A vonalintegrál általában függ az úttól. De vannak olyan speciális és a természettudományban rendkívül fontos esetek, amikor a vonalintegrál értéke nem függ az úttól. A vonalintegrálok tulajdonságai mindenben megfelelnek a hagyományos integrálok (mint lineáris operátorok) tulajdonságainak.

Kétdimenziós (síkbeli) esetben legyen adott $F(x,y) = P(x,y)\mathbf{i} + Q(x,y)\mathbf{j}$, ahol **i** és **j** a megszokott Descartes egységvektorok, ekkor $\int\limits_C F(x,y)d\mathbf{s} = \int\limits_C \left(P(x,y)\mathbf{i} + Q(x,y)\mathbf{j}\right)\cdot\left(dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j}\right) = \int\limits_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy$. Ezt a formulát lehet magasabb rendekre is értelemszerűen általánosítani.

Különítsünk el néhány alesetet a két-dimenziós esetben:

(a) Ha a C görbe egyenlete az $y = f(x)$ formában adott, akkor $y = f(x)$ és dy = $dy = f'(x)dx$ alapján a vonalintegrál a $\int\limits_{a_1}^{a_2} \left[P\{x, f(x)\}dx + Q\{x, f(x)\}f'(x)dx\right]$ kifejezés szerint a „hagyományos" módon számítható.

(b) Amennyiben a C görbe az $x = g(y)$ alakban adott, akkor $dx = g'(y)dy$ alapján a vonalintegrál a $\int\limits_{b_1}^{b_2} \left[P\{g(y), y\}g'(y)dy + Q\{g(y), y\}dy\right]$ kifejezés segítségével számolható.

(c) Amennyiben a C görbe paraméteres formában, $x = \phi(t)$ és $y = \psi(t)$, adott, úgy $\int\limits_{t_1}^{t_2} \left[P\{\phi(t), \psi(t)\}\right]\phi'(t)dt + Q\{\phi(t), \psi(t)\}\psi'(t)dt$ a vonalintegrál kiszámításának módja, ahol t_1 és t_2 t értékei az $A(a_1, b_1)$ és $B(a_2, b_2)$ pontokban.

A fenti módszerek kombinációi is gyakorta sikeresen alkalmazhatók.

Megjegyzendő, hogy amennyiben **F** az erő és **r** az út, az $\int\limits_C \mathbf{F}d\mathbf{r}$ kifejezés azon teljes munkát jelenti, amelyre az objektum C menti mozgatásához szükség volt.

Mintafeladatok

- Számítsuk ki az $\int_{(0,1)}^{(1,2)} \left[\left(x^2 - y\right) dx + \left(y^2 + x\right) dy \right]$ integrált az (a) a [0,1]-ből [1,2]-be menő egyenes mentén; és (b) a [0,1]-ből [1,1]-be, majd az [1,1]-ből [1,2]-be menő egyenesek mentén.
  Megoldás: (a) a [0,1] és [1,2] pontokat összekötő egyenes egyenlete $y = x + 1$, azaz $dy = dx$, és így $\int_{x=0}^{1} \left[\left(x^2 - (x+1)\right) dx + \left((x+1)^2 + x\right) \cdot 1\, dx \right] = \int_0^1 \left(2x^2 + 2x\right) dx = \frac{5}{3}$.
  (b) a [0,1] és [1,1] pontokat összekötő egyenes egyenlete $y = 1$, azaz $dy = 0$, valamint az [1,1] és [1,2] pontokat összekötő egyenes egyenlete $x = 1$, azaz $dx = 0$, tehát $\int_{x=0}^{1} \left[\left(x^2 - 1\right) dx + 0 \right] = \int_0^1 \left(x^2 - 1\right) dx = -\frac{2}{3}$ és $\int_{y=1}^{2} \left[(1-y)(0) + (y^2+1) dy \right] = \int_1^2 \left(y^2 + 1\right) dy = \frac{10}{3}$,
  azaz a vonalintegrál értéke ezen út mentén $10/3 - 2/3 = 8/3$. Megállapíthatjuk tehát, hogy a vonalintegrál általában függ az úttól. A fizikában és a fizikai kémiában majd különös jelentőségűek lesznek azok az esetek, amikor az integrál értéke útfüggetlen, csak a kezdeti és végállapottól függ.
- A drótkötél görbéjét az $y = 3x$ függvény, míg a drótkötél sűrűségét $P(x, y) = yx \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$ és $Q(x, y) = x^2 \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$ függvények írják le. Mi a drótkötél tömege $x = 0$ és $x = 2$ cm között?

  Megoldás: $V = \int P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int yxdx + x^2dy$

  $$y = 3x$$
  $$\frac{dy}{dx} = 3 \to dy = 3dx$$
  $$V = \int_0^2 3x \cdot xdx + x^2 \cdot 3dx = \int_0^2 6x^2 dx = [2x^3]_0^2 = 16 \text{ gramm}$$

- A mágneses fluxus $\varphi = \iint B(x,y)dxdy$. Mekkora a fluxus az $y = x$ és $x = 1$ egyenesek által közbezárt tartomány felett, ha $B(x,y) = x^2 + y^2$?
  Megoldás: $T = \iint_{0\,0}^{1\,x} x^2 + y^2 dydx = \int_0^1 \left[x^2 y + \frac{y^3}{3}\right]_0^x dx = \int_0^1 x^3 + \frac{x^3}{3} dx = \int_0^1 \frac{4}{3} x^3 dx = \left[\frac{4}{3}\frac{x^3}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$

- Az elektromos tér munkáját egy ponttöltés elmozdítására a $W = \int Edr$ integrál határozza meg. Mekkora munkát végez a $P(x,y) = xy^2$ és $Q(x,y) = \frac{y^3}{x}$ jellemzett erőtér az $A(0;2)$ és $B(5;15)$ pontok között, ha a ponttöltés útvonala $y = 5\sqrt{x}$?

  Megoldás: $W = \int P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_0^5 xy^2 dx + \frac{y^3}{x} dy$

  $$y = 5\sqrt{x}$$
  $$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{5}{2} x^{-1/2} \to dy = \frac{5}{2} x^{-1/2} dx$$

Ennek alapján:

$$W = \int_0^5 x\left(5\sqrt{x}\right)^2 dx + \frac{\left(5\sqrt{x}\right)^3}{x}\frac{5}{2}x^{-1/2}dx = \int_0^5 25x^2 + \frac{625}{2}dx$$

$$= \left[\frac{25x^3}{3} + \frac{625}{2}x\right]_0^5 = 2604\text{J}$$

<u>*Gyakorló feladatok*</u>

- Számítsa ki a következő vonalintegrálokat:

  (a) $P(x,y) = x^2$ és $Q(x,y) = y^2$, valamint a g görbe az $y = x^2$ és $x \in [0;3]$ (megoldás: 252)

  (b) $P(x,y) = x^2y^2$ és $Q(x,y) = \sqrt{x\,y}$ valamint a g görbe az $y = 2x$ és $x \in [0;2]$ (megoldás: 29,37)

  (c) $P(x,y) = x + y$ és $Q(x,y) = y - x$ valamint a g görbe az $x(t) = cost$ és $y(t) = sint$ és $t \in [\frac{\pi}{2}; 0]$ (megoldás: $\frac{\pi}{2}$)

  (d) $P(x,y) = x + y$ és $Q(x,y) = xy$ valamint a g görbe az $x(t) = t$ és $y(t) = e^t$ és $t \in [0;1]$ (megoldás: $-\frac{1}{4} + e + \frac{e^2}{4}$)
- Adja meg az $\mathbf{F}(x,y) = (x,y)$ vektormezőnek az $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0,\pi]$ paraméteres görbén vett vonalintegrálját.
- Adja meg az $\mathbf{F}(x,y) = (-y,x)$ vektormezőnek az $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0,\pi]$ paraméteres görbén vett vonalintegrálját.

IV.7 Többszörös integrál

Természetesen az integrál és az integrálás fogalma többváltozós függvényekre is kiterjeszthető, a kémia gyakorlatában többnyire ilyen esetekkel találkozunk.

Fogalmak, definíciók

Kettős integrál. Legyen $F(x,y)$ egy zárt része az xy síknak. Osszuk fel ezt a területrészt n db kis részre, ezek területe legyen ΔA_k, k = 1, 2, …, n. Képezzük az alábbi összeget: $\sum_{k=1}^{n} F(\xi_k,\eta_k)\Delta A_k$, ahol ξ_k és η_k a k-adik területrészben lévő valamely x, illetve y koordináta értéket jelölik. Tekintsük a $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} F(\xi_k,\eta_k)\Delta A_k$ határértéket. Ha ez a határérték létezik (be lehet bizonyítani, hogy ez a határérték akkor létezik, ha $F(x,y)$ legalább darabonként folytonos és azt is, hogy a határérték független a ξ_k és η_k értékek választásától), úgy ennek jelölése $\iint_R F(x,y)dA$ és az $F(x,y)$ kétváltozós függvény kettős integráljának nevezzük az R térrész felett.

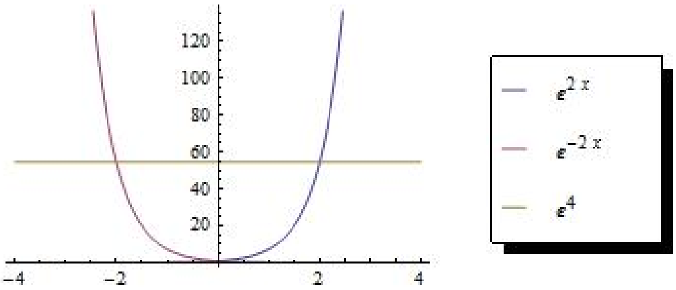
Többszörös integrálok kiszámításakor általában az integrálás sorrendje felcserélhető, de a határokkal majdnem mindig vigyázni kell. A Fubini-tétel azt mondja ki, hogy amennyiben egy többváltozós (jelen példában kétváltozós) integrál véges, akkor igaz, hogy $\iint_{[a,b]\times[c,d]} F(x,y)dA=\int_c^d\left[\int_a^b F(x,y)dx\right]dy=\int_a^b\left[\int_c^d F(x,y)dy\right]dx$, azaz a kétváltozós integrál értéke független az egyváltozós integrálok elvégzésének sorrendjétől. A tétel akkor is igaz, ha a fenti példánál bonyolultabb alakzatokra integrálunk, ahol az egyváltozós x (y) szerinti integrálok határaiban lehet y (x) függés.

Mintafeladatok

- Számítsuk ki az ellipszis területét a következő kettős integrál segítségével: $\iint \mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

  Megoldás: Az ellipszis korábbról ismert egyenlete $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (a és b a kis és nagy tengely), így $y=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$ és $T=2\int_{-a}^{a}\mathrm{d}x\int_0^{b\sqrt{1-x^2/a^2}}\mathrm{d}y=4b\int_0^a\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,dx=4ab\int_0^1\sqrt{1-t^2}\,dt$, ahol a helyettesítéses integrálással ($t=x/a$) próbálkozunk a fellépő határozott integrál kiszámításához. A fellépő integrál kiszámításához integráltáblázatra (vagy számítógépes algebra szoftverre, pl. *Mathematica*) van szükségünk, mely szerint $T=4ab\frac{1}{2}\left[t\sqrt{1-t^2}+\arcsin t\right]_0^1$, azaz $\underline{\underline{T=ab\pi}}$. Ez a képlet természetesen jól ismert a korábbi tanulmányokból.

- Mennyi az $y = e^{-2x}$, $y = e^{2x}$ és $y = e^4$ függvények által határolt síkidom területe?
 A keresett síkidom szimmetrikus, így elég a jobb oldali részt kiszámolni.



Megoldás:

Metszéspontok: $e^{-2x} = e^{2x}$ $\rightarrow x = 0$ és $y = 1$

$e^{2x} = 4$ $\rightarrow x = 2$

$$\frac{1}{2}T = \iint 1dydx = \iint\limits_{x_0=0,y_0=e^{2x}}^{x_1=2,y_1=e^4} 1dydx = \int\limits_0^2 [y]_{e^{2x}}^{e^4}dx = \int\limits_0^2 (e^4 - e^{2x})dx$$

$$= \left[e^4x - \frac{e^{2x}}{2}\right]_0^2 = 2e^4 - \frac{e^4}{2} - 0 + \frac{1}{2}$$

$$T = 3e^4 + 1$$

- Mekkora az NMR készülék belsejében lévő, 6 cm széles és 10 cm hosszú téglalap alakú rést átdöfő teljes ϕ mágneses fluxus, ha a téglalap közepére téve az origót, a mágneses indukció nagysága $B(x,y) = (10 - 0.01x^2 - 0.01y^2)$ T alakban változik? ($\phi = \iint B(x,y)dxdy$)

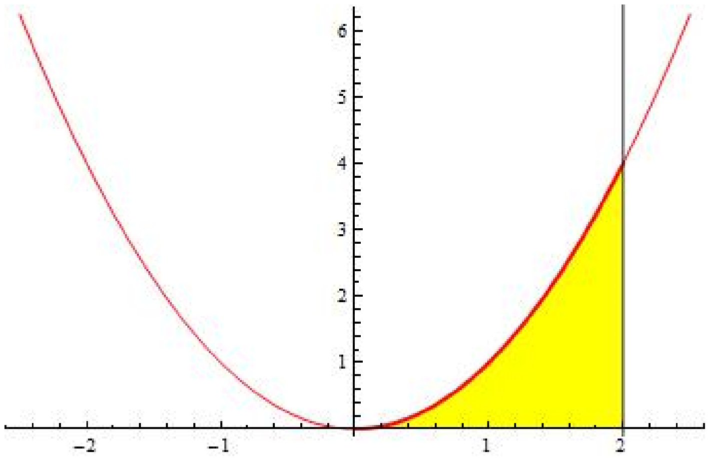
 Megoldás: Helyezzük az origónkat a 6 cm × 10 cm-es téglalap középpontjába.

 Ekkor $x_0 = -3$, $x_1 = 3$, $y_0 = -5$, $y_1 = 5$.

 A teljes fluxus: $\phi = \iint B(x,y)dxdy = \iint(10 - 0.01x^2 - 0.01y^2)dxdy$

 $= \iint_{-3,-5}^{3,5}(10 - 0.01x^2 - 0.01y^2)dxdy = \left[10xy - \frac{1}{300}(x^3y - xy^3)\right]_{-3,-5}^{3,5}$ =593.2

- Az elektromos térerősség fluxusát az $\phi = \iint EdA$ képlet adja meg. Mekkora az $E = \frac{e^x}{x} + y^2$ erővonal fluxusa az $y = x^2$ és $x = 2$ egyenesek által határolt tartományon?



1. ábra pirossal ábrázolva y=x², míg feketével ábrázolva x = 2

Az ábráról leolvasható, hogy $y \in [0, x^2]$ és $x \in [0,2]$

$$\phi = \iint EdA = \iint_{0,0}^{0,x^2} \frac{e^x}{x} + y^2 dx = \int_0^2 \left[\frac{e^x}{x} y + \frac{y^3}{3}\right]_0^{x^2} dx$$

$$= \int_0^2 \frac{e^x}{x} x^2 + \frac{x^6}{3} - \frac{e^x}{x} 0 + \frac{0^3}{3} dx = \int_0^2 \frac{e^x}{x} x^2 + \frac{x^6}{3} dx = \int_0^2 e^x x + \frac{x^6}{3} dx$$

A keresett integrál első tagja a parciális integrálás szabályai szerint határozható meg az $f'(x) = e^x$ és $g(x) = x$ választás mellett.

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$$

$$\int e^x x dx = e^x x - \int e^x \cdot 1 dx = e^x x - e^x + c$$

Ezek alapján:

$$\phi = \left[e^x x - e^x + \frac{x^7}{3 \cdot 7}\right]_0^2 = e^2 - 1 + \frac{2^7}{21} = 12.5 \text{ Vm}$$

Gyakorló feladatok

- Tekintsük a (0,0), (0,2), (2,0), (2,2) pontok által határolt négyzetet. Mennyi az $x^2(x+y)$ függvény alatti térfogat ezen a tartományon?
- Adja meg a $\iint \frac{1}{(x+y)^2} dydx$ integrál értékét az $y = x$ és $y = 2$ egyenesek és az $y = 1 / x$ hiperbola által közrezárt síkrészen. (megoldás: 27/64)
- Adja meg a $\iint x^2 + y^2 dydx$ integral értékét az x tengely és az $y = x$ és $x = 1$ egyenesek által közrezárt síkrészen. (megoldás: 1/3)
- Végezze el az alábbi integrál kiszámítását: $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\sqrt{x^2+y^2}} dxdy$.
- Ellenőrizze a Fubini-tételt az $\int_0^2\int_0^2 (xy+2y)dxdy$ integrál példáján.
- Integrálja az $F(x,y) = xy$ függvényt az $x \in [0,3]$-n vett $y = x^2$ görbe alatti tartományon. Ellenőrizze Fubini tételét az x és y szerinti integrálok sorrendjének felcserélésével. (Vigyázat az integrálási határokkal!)
- A klasszikus statisztikus mechanika szerint hőmérsékleti egyensúlyban lévő rendszerek átlagos $\langle\varepsilon\rangle$ energiája az alábbi képlettel számolható (az energia bármely értéket felvehet): $\langle\varepsilon\rangle = \dfrac{\iint \varepsilon\, e^{-\varepsilon/k_\mathrm{B}T}\mathrm{d}p\mathrm{d}x}{\iint e^{-\varepsilon/k_\mathrm{B}T}\mathrm{d}p\mathrm{d}x}$, ahol k_B az ún. Boltzmann-állandó, p és x pedig az impulzus (lendület), illetve a koordináta. Egyszerű harmonikus oszcillátorra $\varepsilon(p,x) = \dfrac{p^2}{2m} + \dfrac{1}{2}kx^2$, ahol m a redukált tömeg és k a kvadratikus erőállandó. Az integrál kiszámításával határozza meg az átlagos energiát. Mennyivel járulnak hozzá az egyes kvadratikus tagok az átlagos energiához?

Javasolt irodalom

Bárczy Barnabás: Integrálszámítás, 3. kiadás, Műszaki Könyvkiadó, 1973.