VIII. Szélsőérték számítás

Fogalmak

Az „elemi úton" meghatározható függvények jellemzői:
(a) értelmezési tartomány és értékkészlet megadása
(b) zérushelyek (ahol $y = 0$) és y tengelypontok (ahol $x = 0$) meghatározása
(c) folytonosság vizsgálata (szakadási helyek)
(d) paritás vizsgálat (páros vs. páratlan)
(e) egyéb elemi jellemzők (pl. periodicitás)

Egyváltozós függvények szélsőérték helyeit (**stacionárius pontjait**) meg lehet keresni az első derivált vizsgálatával (ez a szélsőérték létezésének szükséges feltétele), a függvénynek szélsőértéke van, amennyiben (a) $\frac{dy}{dx} = 0$, vagy (b) $\frac{dy}{dx}$ nem létezik. Annak megállapítása, hogy a függvény szélsőértéke minimum, maximum, vagy inflexiós ponttal van dolgunk, további meggondolásokat igényel. Az **első derivált teszt** azt mondja, hogy az adott helyen a függvénynek lokális maximuma van, amennyiben a ponttól balra $dy/dx > 0$, míg a ponttól jobbra $dy/dx < 0$, míg a szélsőérték lokális minimum, amennyiben a ponttól balra $dy/dx < 0$, míg a ponttól jobbra $dy/dx > 0$. A szélsőérték jellegét a **második derivált teszt** segítségével is meghatározhatjuk: (a) $y' = 0$ és $y'' < 0$ $\Rightarrow$ lokális maximum, (b) $y' = 0$ és $y'' > 0$ $\Rightarrow$ lokális minimum, és (c) $y' = 0$ és $y'' = 0$ $\Rightarrow$ az inflexiós pont létezésének szükséges, de nem elegendő feltétele, elegendő feltétel, ha $y''' \neq 0$ vagy y'' előjelet vált a pont környezetében. A legtöbb eljárás lokáli szélsőértékek keresésére ad lehetőséget, a globális minimum vagy maximum megkeresése speciális feladat lehet.

Mintafeladatok

- Jellemezzük az $f(x) = \dfrac{2x^3 - 8x^2}{(x-4)(x-3)(x+3)}$ függvényt.

  Megoldás: Értelmezési tartomány: $x \in R - \{-3,+3,+4\}$; $x = 4$ megszüntethető szakadás, hiszen át lehet térni a $g(x) = \dfrac{2x^2}{x^2 - 9}$ függvény vizsgálatára, mely egy pont ($x = 4$) kivételével megegyezik az eredeti f függvénnyel, így $x = -3$ és $+3$ nem megszüntethető szakadások, másutt a függvény folytonos; zérushely: $2x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$; a $g(x)$ függvény páros, hiszen $g(-x) = g(x)$.

Gyakorló feladatok

- Keresse meg az $f(x, y) = 2x^2 + 2y^2 + 4y + 1$ függvény szélsőérték helyeit (stacionárius pontjait) és jellemezze azokat.

VIII.1 Szélsőérték számítás mellékfeltétellel

Fogalmak

Gyakran előforduló feladat a fizikában és a fizikai kémiában, hogy adott függvény szélsőértékét úgy kell meghatároznunk, hogy egyben valamilyen feltételt (megszorítást) is ki kell elégítenünk. Ekkor feltételes szélsőérték keresésről beszélünk.

Feltételes szélsőérték-keresés esetén elterjedt a **Lagrange-multiplikátor** használata. Ekkor a függvényt kiegészítjük a feltétel nullára redukált alakjával ($h(x,\lambda) = f(x) + \lambda\Phi(x)$), ahol λ az ún. Lagrange-multiplikátor, és ennek az új függvénynek keressük a változói szerint a szélsőértéket.

Természetesen a szélsőérték-keresés feladatát többváltozós függvények esetén is végre kell tudnunk hajtani, ekkor a feltételek az első parciális deriváltakra vonatkoznak. Legyen adott az $f(x,y)$ kétváltozós függvény és az legyen folytonosan teljesen differenciálható (elsőrendű parciálisok léteznek és folytonosak). A szélsőérték létezésének szükséges feltétele az elsőrendű parciális deriváltak eltűnése, az így származtatható egyenletrendszerből kell a keresett (x_0, y_0) szélsőértéket kiszámítani. A lehetséges szélsőérték helyeket stacionárius pontoknak nevezzük.

Mintafeladatok

- A henger alakú, 1 dm^3 térfogatú testek közül melyik a legkisebb felszínű?

Megoldás: A henger felszíne: $F(r,m) = 2T + P = 2r^2\pi + 2r\pi \cdot m$, ahol r az alap sugara és m a henger magassága. Tegyük egyváltozóssá ezt a függvényt a feltétel segítségével: $V = T \cdot m = r^2\pi \cdot m$ és $V = 1$ alapján $m = 1/r^2\pi$. Így tehát a minimalizálandó függvény $\widetilde{F}(r) = 2r^2\pi + 2/r$. A szélsőérték keresést a szokásos módon végezve $\widetilde{F}' = 4r\pi - \dfrac{2}{r^2}$ és $\widetilde{F}'' = 4\pi + \dfrac{4}{r^3}$, amiből adódik, hogy $\widetilde{F}' = 0 \Rightarrow 4r\pi - \dfrac{2}{r^2} = 0$, tehát $r^3 = \dfrac{1}{2\pi}$ és így $r \approx 0{,}542$ dm. A második derivált teszt alapján a kapott lokális szélsőérték minimum, a magasság 10,84 cm, azaz $F_{\min} \approx 5{,}54$ dm^2.

- Mik azon legnagyobb paralelepipedon dimenziói és térfogata, mely egy *a* sugarú félgömbbe belefér?

Megoldás: A tégla térfogata: $V(x,y,z) = (2x)(2y)z = 4xyz$, a félgömb egyenlete $x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \Rightarrow z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$. A térfogat ott legnagyobb, ahol az $U = x^2y^2z^2 = x^2y^2(a^2 - x^2 - y^2)$ függvénynek maximuma van. A szokásos módon végezve a szélsőérték-keresést $\dfrac{\partial U}{\partial y} = 0 = 2a^2x^2y - 4x^2y^3 - 2x^4y$ és $\dfrac{\partial U}{\partial x} = 0 = 2a^2xy^2 - 4x^3y - 2xy^4$, azaz minthogy a triviális $x = y = 0$ nem megfelelő megoldás nekünk, így az egyenletrendszer megoldása $\underline{\underline{x = y = \frac{a}{\sqrt{3}}}}$ és $\underline{\underline{z = \frac{a}{\sqrt{3}}}}$. Ennek alapján téglatest maximális térfogata $\underline{\underline{V_{\max} = \frac{4a^3}{3\sqrt{3}}}}$.

Gyakorló feladatok

- Melyek az $f(x,y)=2x^2+2y^2+4y+1$ függvény szélsőértékei, amennyiben az $x^2+y^2=1$ mellékfeltétel mellett keressük a minimumot?
- Határozza meg az alábbi függvény szélsőértékhelyeit: $f(x,y)=(x-2)^2+(y+3)^2$.
- Határozza meg az alábbi függvény szélsőértékhelyeit: $f(x,y)=y^3-2y^2-x^2+2xy$.
- Határozza meg az $f(x,y)=2x^2+y^2-2xy+4x-2y+5$ függvény szélsőérték-helyeit, és állapítsa meg azok minőségét (minimum avagy maximum).
- Határozza meg az $f(x,y)=x^2+y^3+2xy-3$ függvény szélsőértékhelyeit, és állapítsa meg azok minőségét (minimum avagy maximum).
- Oldja meg az előző oldalon a félgömbbe írt paralelepipedon térfogatára vonatkozó mintafeladatot a Lagrange-multiplikátoros szélsőérték-keresés segítségével.
- Utópiában van egy feneketlen tenger. Ebből emelkedik ki egy sziget, melynek alakjára az $f(x,y)=1-x^2-y^2$ függvény illeszkedik. Hol van a sziget teteje? Bizonyítsa be, hogy a szigetnek tényleg teteje van és nem alja!
- Cége profitját szeretné maximalizálni! Piaci elemzők szerint az Ön által gyártott A és B termék x és y mennyiségétől a P profit a $P(x,y)=-(x+2)^2-(y-4)^2+2xy$ egyenlet szerint függ. Mennyit gyártson cége az A, illetve a B termékből?
- Tündérvárosban járva látjuk, hogy nagy a baj: a vegyésznek felbérelt manók kudarcba fulladt kísérlete során felrobbant a tündérsörüzem egyik gépe. Sikerült újat építeni, de nem tudják beállítani, hogy milyen koncentrációban adagolják az összetevőket a maximális kitermeléshez. Mit mondana nekik, ha a K kitermelés az x és y összetevők függvényében $K(x,y)=-(x+3)^2-(y+2)^2+xy$?
- Keressük meg az ellipszis azon pontjait amelyek az ellipszis középpontjától a leg-messzebb vannak. Képletbe foglalva: keressük az $f(x,y)=x^2+y^2$ távolságnégyzet maximumát (ami ugyanott van mint a távolság maximuma), azon mellékfeltétel mellett, hogy az ellipszisen vagyunk, azaz $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.
- Tekintsük a $2x^2+y^2+4z^2=1$ ellipszis felszínét. Hol a legnagyobb/legkisebb itt az $f(x,y,z)=8xyz$ függvény értéke?
- Vezessük le a **Snellius-Descartes törvényt** mellékfeltételes függvény szélsőérték keresés segítségével. A függvény, aminek a minimumát keressük, az az idő ami alatt a fénysugár eljut az egyik közeg adott pontjából a másik közeg adott pontjába.

VIII.2 A legkisebb négyzetes polinom közelítés

A XIX. század elején elsőként Gauss, illetve Legendre fejlesztett ki olyan $p(x)$ polinom közelítést, mely minimalizálja – valamilyen értelemben – egy pontsortól való eltérés négyzetösszegét. A fizikai kémiában leggyakrabban az egyenes illesztésével találkozunk, ez is egy szélsőérték-keresési feladat.

Legyen adott egy $N + 1$ elemű $\{x_i, y_i\}$ mérési adatsor, s erre próbáljunk egy két paraméterrel rendelkező, $p(x) = Mx + B$ alakú polinomot (egyenest) illeszteni. A minimalizálandó függvényünk (a pontoktól való eltérés (hiba) négyzetösszege) a következő: $S = \sum_{i=0}^{N} (y_i - Mx_i - B)^2$. Keressük a B és M paraméterek szerinti szélsőértéket (minimumot):

$$\frac{\partial S}{\partial B} = -2\sum_{i=0}^{N} 1 \cdot (y_i - Mx_i - B) = 0 \Rightarrow (N+1)B + \left(\sum x_i\right)M = \sum y_i$$

$$\frac{\partial S}{\partial M} = -2\sum_{i=0}^{N} x_i \cdot (y_i - Mx_i - B) = 0 \Rightarrow \left(\sum x_i\right)B + \left(\sum x_i^2\right)M = \sum x_i y_i$$

Legyen $s_0 = N + 1$, $s_1 = \sum x_i$, $s_2 = \sum x_i^2$, $t_0 = \sum y_i$ és $t_1 = \sum x_i y_i$ (a jelölések a magasabb fokú (nemlineáris) polinomok illesztésénél segítenek különösen, de erre most itt nem térünk ki külön). Szorozzuk meg az első egyenletet s_1-gyel, a másodikat s_2-vel, majd vonjuk ki őket egymásból, ennek alapján már meg tudjuk határozni a két ismeretlen paramétert. Az eredmény B-re: $B = \frac{s_2 t_0 - s_1 t_1}{s_0 s_2 - s_1^2}$, azaz a mérési adatok ismeretében az egyenes tengelymetszete egyszerűen meghatározható.